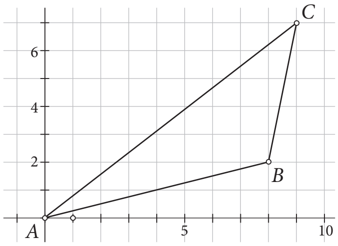
Matka 26 (2017./2018.) br. 104

METODA VEZICA

Helena Kisić, Petar Pavić, XV. gimnazija, Zagreb

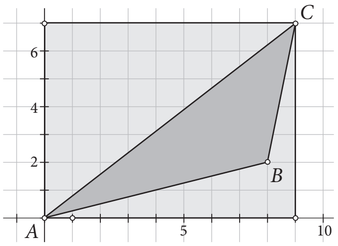
Pozdrav, mladi matematičari! U ovom ćemo vam članku otkriti zanimljivu metodu zvanu „metoda vezica" kojom ćete s lakoćom moći izračunati površine vrlo kompliciranih nepravilnih mnogokuta. Računanje površine nepravilnog mnogokuta može biti dugotrajno jer mnogokut treba dijeliti na više trokuta, računati njihovu površinu i zbrajati – što može dovesti i do eventualnih pogrešaka u prilično dugom računu. Na sreću, od Carla Friedricha Gaussa naučili smo što je i kako se koristi „gaussova formula" ili „metoda vezica". Metoda se naziva po njemu, iako on nije njezin izumitelj jer ju je spominjao u svojim radovima i time je predstavio svijetu. Ova je metoda jednostavna i brza za korištenje pa smo sigurni kako će vam biti od pomoći. Može se primijeniti za računanje površine mnogokuta ako iz svakog njegova vrha izlaze točno dvije stranice, odnosno ako je zatvoren i nema presjecanja.

Prije nego što vam pokažemo kako ona funkcionira, voljeli bismo da se sami iskušate u računanju površina nekih mnogokuta unutar koordinatnog sustava kako biste shvatili da vam ta formula zapravo i nije toliko strana.

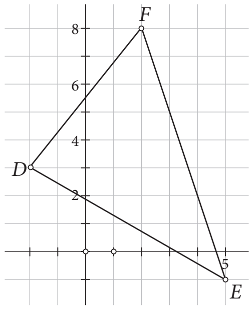


Zadatak 1. Izračunajte površinu trokuta ΔABC nacrtanog u pravokutnom koordinatnom sustavu.

Rješenje. Za početak odredimo koordinate vrhova trokuta ΔABC. Znamo da površinu trokuta računamo tako da pomnožimo duljinu stranice s duljinom odgovarajuće visine te umnožak podijelimo s dva, a ako je trokut pravokutan, onda samo pomnožimo duljine kateta te njihov umnožak podijelimo s dva. Izračunajte površinu zadanog trokuta sa slike.

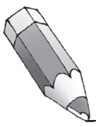


Ako vam je potrebna mala pomoć pogledajte sliku na rubu. Nadodamo li dužine koje tvore pravokutnik oko toga trokuta, vidite da se taj pravokutnik sastoji od tri pravokutna trokuta, jednog pravokutnika i zadanog trokuta. Vjerojatno vam je sada prilično jasno što dalje trebate činiti kako biste izračunali površinu zadanog trokuta pa ju i izračunajte.

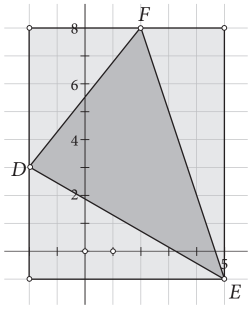


Zadatak 2. Izračunajte površinu trokuta ΔDEF nacrtanog u pravokutnom koordinatnom sustavu.

Rješenje. Slijedite korake koje smo radili u prethodnom zadatku, a ako vam treba pomoć, pogledajte sliku na rubu.



Obje površine računali smo na isti način; najprije smo izračunali površinu velikog pravokutnika i od nje oduzeli zbrojene površine u prvom primjeru žutih, a u drugom primjeru crvenih pravokutnih trokuta i pravokutnika. Vjerujemo da ste u prvom primjeru dobili površinu 19, a u drugom 25.5.



Metoda vezica

Sljedeći način računanja površine mnogokuta je metoda vezica i nju ćemo vam detaljno objasniti na primjeru drugog trokuta.

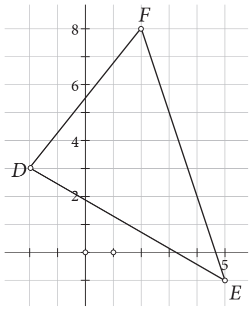
Prvi korak u računanju površine metodom vezica je određivanje koordinata vrhova mnogokuta. Odaberemo bilo koji vrh mnogokuta i zapišemo njegove koordinate jednu pokraj druge. Zatim se pomičemo suprotno od kazaljke na satu ispisujući redom koordinate svakog vrha ispod koordinata prethodnog vrha. Kada zapišemo sve koordinate, na kraju ponovno zapisujemo koordinate prvog vrha koje smo zapisali. Time x i y koordinate formiraju dva stupca čije elemente spajamo kao vezice tenisica (x koordinate povezujemo s y koordinatom sljedeće točke i y koordinate s x koordinatom sljedeće točke). Brojeve na krajevima linija koje su, ako gledamo s lijeva na desno, usmjerene prema dolje množimo i zapisujemo jedne ispod drugih u pozitivan stupac, a brojeve na krajevima linija koje su, ako gledamo s lijeva na desno, usmjerene prema gore množimo i zapisujemo jedne ispod drugih u negativan stupac, što znači da ih množimo brojem (–1). Sljedeći korak je da brojeve iz oba stupca zbrojimo i podijelimo s dva.

Primjer 1. Primijenimo opisanu metodu za računanje površine trokuta ΔDEF.

Rješenje: Koordinate vrhova trokuta su $E(5, -1)$, $F(2, 8)$ i $D(-2, 3)$. Zapišimo ih jedne ispod drugih kao što je opisano.

5	-1	+	–
2	8	40	-(-2)
-2	3	6	-(-16)
5	-1	2	-15

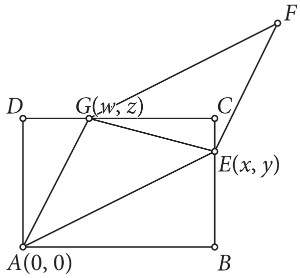
$$P = \frac{40+6+2+2+16-15}{2} = 25.5$$



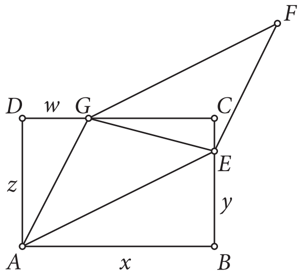
Dokaz metode vezica

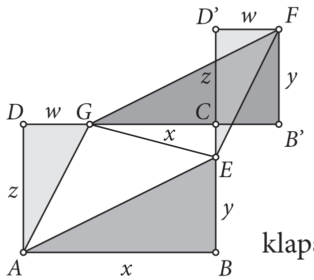
Metodom vezica možemo izračunati i površinu trokuta iz prvog zadatka. Sada kada znate kako se računa površina pomoću metode vezica, izračunajte površinu prvog trokuta pomoću metode vezica i provjerite jeste li dobili jednak rezultat kao i prvi put kada ste pravokutnik razdvajali na dijelove i oduzimali pravokutne trokute i manji pravokutnik. Rezultat koji ćete dobiti isti je onom iz prvog zadatka, ali zašto je tako?

Krenimo od trokuta AEG kojemu je vrh A u ishodištu. Docrtajte još jedan trokut, sukladan tom trokutu, tako da im je zajednička stranica $\overline{EG}$ i tako da ta dva trokuta tvore paralelogram $AEFG$. Zatim nacrtajte pravokutnik $ABCD$ kojemu je vrh A u ishodištu, stranica $\overline{AB}$ je na osi apscisa, stranica $\overline{BC}$ sadrži točku E, a stranica $\overline{CD}$ točku G. Slika će izgledati ovako:



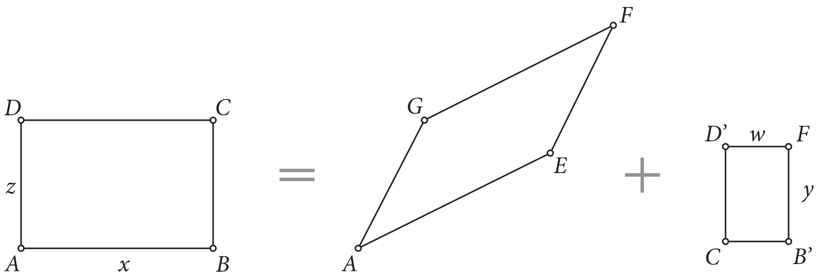
Koordinate točke G zapravo su duljine kateta trokuta AGD, a koordinate točke E su duljine kateta trokuta ABE.



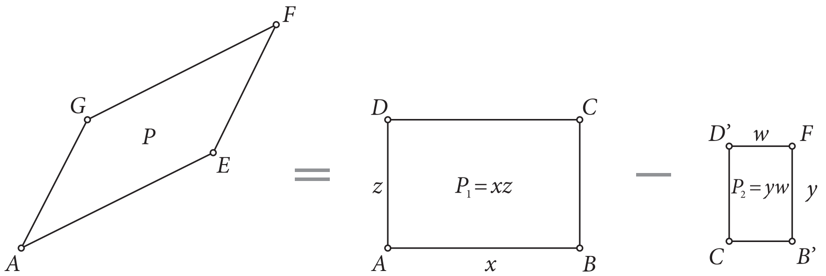


Translatirajmo trokute ΔABE i ΔADG tako da se slike vrhova E i G poklapaju u točki F (Slika na rubu).

Kolika je površina pravokutnika $ABCD$ na slici? Iz slike možemo zaključiti da je površina pravokutnika $ABCD$ jednaka zbroju površina paralelograma $AEFG$ i malog pravokutnika $CB'FD'$.



Iz toga proizlazi da je površina paralelograma jednaka razlici površine velikog i malog pravokutnika.

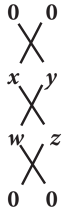


To možemo i drugačije zapisati.

$$\boldsymbol{P = xz - yw = \begin{matrix} x & & y \\ & \times & \\ w & & z \end{matrix}}$$

Završni je korak pomnožiti rezultat brojem $\frac{1}{2}$ jer smo računali površinu paralelograma, a trokut čiju površinu tražimo njegova je polovina.

Prisjetimo se sada metode vezica. Odredimo površinu trokuta ΔAEG. Koordinate vrhova su $A(0, 0)$, $E(x, y)$, $G(w, z)$ Primijenimo metodu vezica:



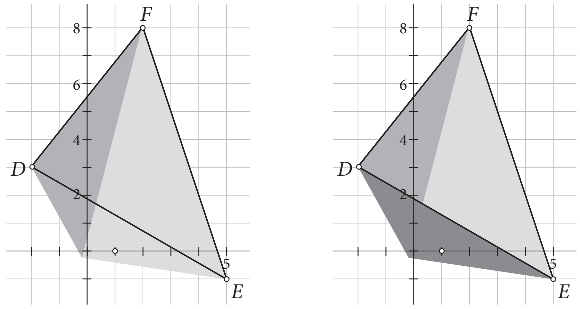
$$p = \frac{0 \cdot y + xz + w \cdot 0 - 0 \cdot x - yw - w \cdot 0}{2} = \frac{xz - yw}{2},$$

baš kao što smo pokazali prethodnim izvodom. Uočite da smo vrhove zapisali pomičući se od prvog vrha u smjeru obrnutom od kazaljke na satu. Što bismo dobili ako bismo vrhove zapisivali u smjeru kazaljke na satu?

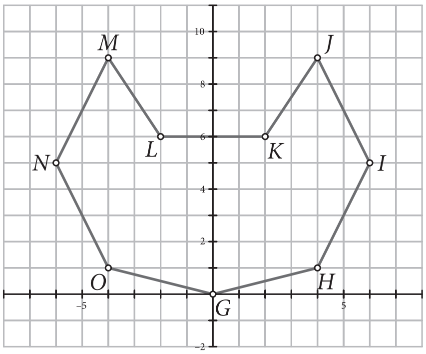
Ali, što ako trokut ima sve vrhove izvan ishodišta?

Ako ste vidjeli način funkcioniranja metode vezica, znate da se metodom vezica iz ishodišta izvlače trokuti te se računaju površine tih manjih trokuta i zbrajaju. Ako mnogokut ima jedan vrh u ishodištu, problema nema, a ako mnogokut nema vrh u ishodištu, kao u drugom primjeru, tada također nema problema jer se metoda vezica sama pobrine za površine koje se trebaju zbrajati i oduzimati. Ako nacrtamo polupravac od ishodišta do prvog vrha koji uzimamo i rotiramo ga do sljedeće točke, tada se taj pravac rotira u pozitivnom smjeru. Pozitivan smjer u matematici suprotno je od kazaljke na satu. Dok to ponavljamo od vrha do vrha, pravac se cijelo vrijeme kreće u pozitivnom smjeru. Kada dođemo do zadnjeg vrha, ponovno uzimamo prvi i u tom se slučaju pravac rotira s lijeve strane prema desnoj, odnosno u smjeru kazaljke na satu. Taj smjer je negativan smjer i površinu trokuta koji se sastoji od ishodišta, prve odabrane točke i zadnje odabrane točke se treba oduzeti kako bi se dobila

površina mnogokuta. Računamo li površinu metodom vezica, površina toga trokuta oduzet će se zbog negativnog smjera.



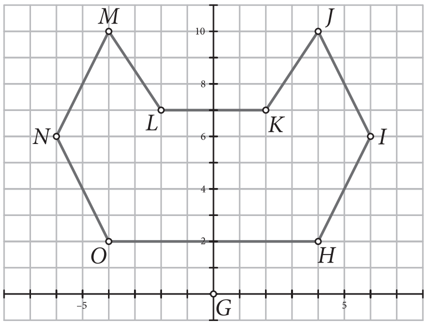
Primjer 2. Pomoću metode vezica izračunajmo površinu zadanog lika nacrtanog u pravokutnom koordinatnom sustavu.



		+	–
0	0		
4	1	0	0
6	5	20	-6
4	9	54	-20
2	6	24	-18
-2	6	12	-(-12)
-4	9	-18	-(-24)
-6	5	-20	-(-54)
-4	1	-6	-(-20)
0	0	0	0

Zbrojimo li dobivene umnoške i rezultat podijelimo brojem 2, dobit ćemo da je površina lika jednaka 66.

Zadatak: Izračunajte površinu zadanoga lika sa slike pomoću metode vezica. Pokušajte sami ili uz pomoć vaših profesora odgonetnuti zašto metoda vezica funkcionira i u ovom slučaju.



Literatura:

1. https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/69408f48-39c1-40e3-bb84-84036dafb310/1.2/html/4807_Povrsina_trokuta.html (7. 4. 2018.)
2. https://www.youtube.com/watch?v=0KjG8Pg6LGk&index=11&list=PLmNp3NTX4KXIqtjt2AKOr4DUIxn64xj8G (7. 4. 2018.)